

CLASA a 9-a

1. În cercul $C(O, r)$ se consideră două coarde perpendiculare $[AB]$ și $[CD]$, cu $AB \cap CD = \{M\}$.

a) Să se arate că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.

b) Paralela prin C la AB intersectează paralela prin A la CD în N și paralela prin B la CD în P . Paralela prin D la AB intersectează paralela prin A la CD în R și paralela prin B la CD în Q . Să se arate că O este centrul dreptunghiului $NPQR$.

Soluție. a) Fie E mijlocul segmentului $[AB]$ și F mijlocul segmentului $[CD]$. Evident patrulaterul $MEOF$ este dreptunghi **1p**

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FD} =$$

$$= 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = 2\overrightarrow{MO} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

b) Conform punctului anterior avem $2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MP} \dots\dots \mathbf{3p}$

În concluzie obținem $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MP})$ și de aici O este mijlocul segmentului $[PR]$
 **3p**

2. Se dă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 1$ și $a_n = n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$, pentru orice $n > 1$. Să se demonstreze că a_{2016} are ultimele 500 de cifre egale cu zero.

Soluție. Observăm că $a_2 = 1 \cdot 2!$; $a_4 = 2 \cdot 4!$; $a_6 = 3 \cdot 6!$. Prin inducție se arată că $a_{2n} = n \cdot (2n)!$ **6p**

Deci a_{2016} este divizibil cu $2016!$ și de aici avem $403+80+16+3=502$ de zero **3p**